Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2022»
Заключительный тур
13 марта 2022 года
7 класс

▷ **1.** Какая фраза зашифрована в многозначном числе без пробелов 13121186120151626136319121611171861410101716231014101011215614101219614715163151012161311115101216131631025, если каждая буква заменена её номером в алфавите русского языка?

Решение: Выпишем для наглядности пронумерованный русский алфавит (не забывая, что в русском языке – 33 буквы):

1	а	12	к	23	х
2	б	13	л	24	ц
3	в	14	м	25	ч
4	г	15	н	26	ш
5	д	16	о	27	щ
6	е	17	п	28	ъ
7	ё	18	р	29	ы
8	ж	19	с	30	ь
9	з	20	т	31	э
10	и	21	у	32	ю
11	й	22	ф	33	я

Расставим пробелы так, чтобы были отделены номера букв, определяющиеся однозначно:

1312118 6 1 20 15 16 26 13 6 319 1216 1117 18 6 14 10 10 17 16 23 10 14 10 10 11215 6 14 10 1219 614 7 15 16 315 10 1216 1311115 10 1216 1316 3 10 25

Будем подставлять буквы, предполагая, что двузначные числа в получившейся записи – это одна буква (если вдруг окажется, что там зашифрованы две буквы, первая из которых – “а” или “б”, это будет легко исправить). Получим следующий промежуточный результат:

1312118 е а т н о ш л е 319 1216 1117 р е м и и п о х и м и и 11215 е м и 1219 614 ё н о 315 и 1216 1311115 и 1216 1316 в и ч

Остальное подставляем подбором (заметим, что 26 в начале нашей строки – это на самом деле 2 и 6).

Ответ: Лауреат Нобелевской премии по химии академик Семёнов Николай Николаевич.

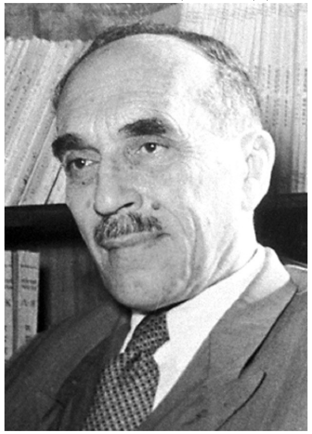
Примечание: Николай Николаевич Семенов родился 3 (15) апреля 1896 года в Саратове в семье служащего. В училище увлекся химией и физикой.

В 1913 окончил Самарское реальное училище (это же училище ранее окончили академик, руководитель плана ГОЭЛРО Г.М.Кржижановский и автор "Приключений Буратино"и других романов А.Н.Толстой), поступил на физический факультет Петербургского университета. С 1914 начал заниматься научной работой под руководством А.Ф.Иоффе. В 1917 окончил университет, в 1918–1920 работал ассистентом в Томском университете и Томском технологическом институте, в 1920 по приглашению Государственного физико-технического и рентгенологического института переехал в Петроград.

В 1920–1931 -– заведующий лабораторией, в 1921–1928 -– заместитель директора Ленинградского физико-технического института. В 1931 Семенов возглавил Институт химической физики, организованный на базе его лаборатории, и оставался его директором до конца жизни.

С 1945 Семенов -– заведующий кафедрой химической кинетики в МГУ. Создатель научной школы, среди его учеников — Я.Б.Зельдович, В.Н.Кондратьев, Ю.Б.Харитон, Н.М.Эмануэль и многие другие. Избран членом многих иностранных академий и обществ, почетным доктором ряда зарубежных университетов.

В 1928 Семенов сформулировал теорию т.н. цепных химических реакций, а в последующие годы — общую теорию разветвленных, вырожденно-разветвленных и неразветвленных цепных реакций. В ее основе лежало представление о том, что активная частица (атом, радикал, возбужденная молекула) реакционной смеси может вступать в реакцию, продуктами которой являются уже две активные частицы и т.д. по цепочке.



Сайт: http://www.biblioatom.ru/founders/semenov$_nikolay_nikolaevich$/

▷ **2.** Пусть a, b, c – целые числа, такие что $a+b+c=0$, $a^3+b^3+c^3=0$. Вычислить $a^{999}+b^{999}+c^{999}$.

Решение: Поскольку по условию $c=-(a+b)$, то

$$0=a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a^3+b^3+3ab(a+b))=3abc,$$

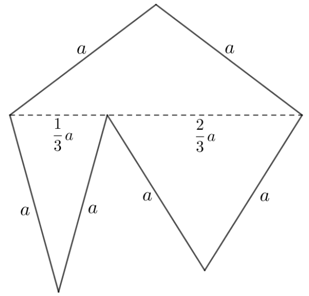
и, следовательно, одно из таких чисел a,b,c равно 0. Если, например, $c=0$, то $a=-b$, тогда

$$a^{999}+b^{999}+c^{999}=-b^{999}+b^{999}=0,$$

Ответ: 0.

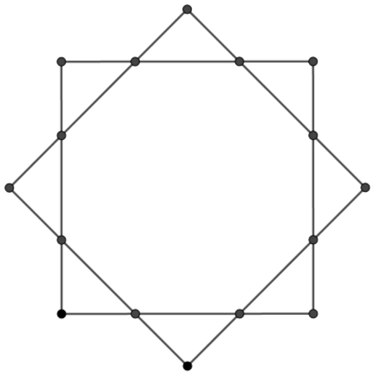
▷ **3.** Существует ли равносторонний шестиугольник, который можно разрезать на три неравных треугольника?

Решение: Один из примеров такого шестиугольника представлен на рисунке:



▷ **4.** Выберите на плоскости 16 точек и проведите через них 8 отрезков одинаковой длины так, чтобы на каждом отрезке было по 4 точки.

Решение: Один из возможных вариантов указан на рисунке



▷ **5.** В записи тринадцатизначного числа, состоящего из одних шестёрок, между некоторыми цифрами поставьте знак сложения так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 2022.

Решение: В искомой сумме не может быть чисел из четырёх шестёрок, и должно встретиться как минимум три числа из трёх шестёрок, иначе оставшиеся двузначные числа дадут слишком маленькую сумму. Кроме того, чтобы в цифре единиц суммы стояла 2, необходимо складывать 2 или 7 чисел, на конце которых стоит 6. Таким образом, единственное возможное представление имеет вид: $666 + 666 + 666 + 6 + 6 + 6 + 6$. Нетрудно убедиться, что эта сумма действительно равна 2022.
Ответ: $666 + 666 + 666 + 6 + 6 + 6 + 6$

▷ **6.** Пусть $S(N)$ – сумма цифр числа N. Найти все трёхзначные числа x такие, что $S(x^k) = S^k(x), k = 2, 3, 4$.

Решение: Пусть $S(x) = a$. Так как $x < 1000$, то $x^4 < 10^{12}$, т.е. x^4 не больше числа, состоящего из 12 девяток, так что $S(x^4) = S^4(x) = a^4 \leqslant 108$, т.е. $a \leqslant 3$. Поэтому $x \in \{300; 201; 210; 102; 120; 111; 200; 101; 110; 100\}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что условию задачи удовлетворяют только числа 100, 101 и 110.
Ответ: 100, 101, 110.

▷ **7.** Игра начинается с числа 0. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное от 1 до 9. Выиграет тот, кто получит число 10^{10}. Кто и как выиграет при правильной игре, если играют двое?

Решение: Выиграет второй игрок. Чтобы победить, ему достаточно каждым своим ответным ходом прибавлять такое число, чтобы в сумме с предыдущим ходом первого игрока изменяемое число увеличилось на 10.
▷ **8.** К числу a в некотором порядке применили последовательно четыре действия: умножение на b, деление на b, сложение с b, вычитание b. Какое наибольшее число различных результатов могло при этом получиться, если менять порядок применения действий?

Решение: Обозначим указанные в условии действия через У, Д, С, В. Можно подсчитать, что существует 24 способа их последовательного применения, которые мы выписывать полностью не будем, поскольку в действительности следует рассмотреть значительно меньшее число случаев.
В самом деле, если умножение и деление выполняются друг за другом, то результатом применения всех четырёх действий будет число a, и то же самое верно в случае, когда сложение и вычитание выполняются друг за другом. Поэтому из всех возможных "слов" из четырёх букв У, Д, С, В мы должны рассмотреть только те, в которых У и Д не стоят рядом, а также С и В не стоят рядом, т.е.

УСДВ, УВДС, ДСУВ, ДВУС, СУВД, СДВУ, ВУСД, ВДСУ

Выпишем результаты применения действий в указанных порядках. Первые четыре способа приводят к выражениям

$$a + 1 - b, a - 1 + b, a + b^2 - b, a - b^2 + b;$$

те же самые выражения получаются при четырёх оставшихся способах.
Теперь нетрудно подобрать такие значения a и b, при которых все четыре вы-

ражения различны, например при $a = 3$, $b = 2$ мы получаем результаты 2,4, 5, 1. Следовательно, наибольшее общее число различных результатов равно 5 (напомним, что при применении любого из 16 не выписанных выше способов получается само число a).
Ответ: 5 различных результатов.

▷ **9.** Путешественник в первый день прошёл 20% всего пути и 2 км. Во второй он прошел 50% остатка и ещё 1 км. В третий день – 25% оставшегося пути и ещё 3 км. Остальные 18 км пути он прошёл в четвёртый день. Какова длина пути, пройденного путешественником?

Решение: Проанализируем проделанный путь с конца. Если в четвёртый день ему оставалось пройти 18 км, то $18 + 3 = 21$ км составлял 75% от оставшегося на третий день пути. Значит, в начале третьего дня путешественнику оставалось пройти $21 : 75 \cdot 100 = 28$ км.
Аналогично, $28 + 1 = 29$ км составляли 50% (т.е. половину) пути, предстоящего на второй день, значит, всего в начале второго дня оставалось пройти 58 км.
Наконец, $58 + 2 = 60$ км составляли 80% всего пути, поэтому весь путь равен $60 : 80 \cdot 100 = 75$ км.
Ответ: 75 км.

▷ **10.** Известно, что сумма цифр трёхзначного числа кратна 7. Какое наибольшее число делителей может иметь это число, если известно, что две последние цифры одинаковы?

Решение: Представим данное число в виде $\overline{abb}$. Сумма цифр любого трёхзначного числа лежит в пределах от 1 до 27; кроме того, по условию она должна делиться на 7, то есть

$$1 \leqslant a + 2b = 7k \leqslant 27.$$

Выпишем все возможные значения a и b в зависимости от значения k:

k	$a; b$	Делители числа	Количество делителей
		$133 = 7 \cdot 19$	4
$k = 1$	a = 1; 3; 5; 7	$322 = 7 \cdot 2 \cdot 19$	8
$a + 2b = 7$	b = 3; 2; 1; 0	$511 = 7 \cdot 73$	4
		$700 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$	18
		$266 = 2 \cdot 7 \cdot 19$	8
$k = 2$	a = 2;4;6;8	$455 = 5 \cdot 7 \cdot 13$	8
$a + 2b = 14$	b = 6;5;4;3	$644 = 2^2 \cdot 7 \cdot 23$	12
		$833 = 7^2 \cdot 17$	6
		$399 = 3 \cdot 7 \cdot 19$	8
$k = 3$	a = 3;5;7;9	$588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$	18
$a + 2b = 21$	b = 9;8;7;6	$777 = 3 \cdot 7 \cdot 37$	8
		$966 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23$	16

Как видно из таблицы, наибольшее возможное количество делителей равно 18.
Ответ: 18.